



UNIVERSITATEA TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

Catedra Design de Produs și Robotică

Simpozionul național cu participare internațională

PROiectarea ASIstată de Calculator

P R A S I C ' 0 2

Vol. II - Organe de mașini. Transmisii mecanice

7-8 Noiembrie ■ Brașov, România

ISBN 973-635-075-4

ASUPRA UTILIZĂRII LEGII AMESTECURILOR LA CALCULUL PROPRIETĂȚILOR ELASTICE ALE COMPOZITELOR

Arina MODREA*, Ioan GOIA*, Sorin VLASE*, Irmgard THALMANN**

*Universitatea TRANSILVANIA din Brașov, Romania

** Stuttgart, Germany

Abstract: When the elastic properties of a composite material is perform, often is used "the law of mixtures". This law is easy to apply because had a very simple for, but this law consider an approximate of the field of the strains and stresses that is not conform to the reality. For some composite materials and for a part of the elastic constant this relation can be a very good approximation. For other elastic constants the law of mixture can offer results far from the reality. In the paper the authors make an analysis of some proposed calculus relations for the elastic constants and if the law of mixture can offer good results for the analyzed engineering constants.

Key words: composite material, elastic properties, law of mixtures

1. Introducere

Se va considera un material compozit alcătuit din două faze: o fază cu elasticitate mare numit matrice și o fază cu rezistență mare, cu rol de ranforsare, numit fibră, care este dispus în fibre cilindrice de lungime foarte mare, orientate de-a lungul axei Ox_1 . În cele ce urmează vor fi prezentate formulele de calcul pentru constantele elastice ale unui astfel de compozit obținute de Hill. Există și alte formulări pentru aceste mărimi dar pentru scopul propus analizarea numai a unui tip de formule este suficientă. Ne propunem să determinăm proprietățile unui astfel de material în funcție de proprietățile celor două faze constituate și de concentrațiile procentuale ale acestora. Se face ipoteza că ne aflăm în condițiile elasticității lineare.

Din tot materialul se va considera un element mic de volum dar suficient de mare astfel încât să poată fi considerat omogen. Relațiile dintre tensiuni

și deformații pentru acest material omogen se pot pune sub forma:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\tau}_{23} \\ \bar{\tau}_{31} \\ \bar{\tau}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \\ \bar{\gamma}_{23} \\ \bar{\gamma}_{31} \\ \bar{\gamma}_{12} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

unde bara de deasupra unei mărimi indică media mărimii respective, luate pe întregul element de volum reprezentativ.

Adunând relația a doua cu a treia, se obține

$$\bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33} = 2C_{12}\bar{\epsilon}_{11} + (C_{22} + C_{23})(\bar{\epsilon}_{22} + \bar{\epsilon}_{33}). \quad (2)$$

Dacă se scad aceste relații, se obține

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33} = (C_{22} - C_{23})(\bar{\epsilon}_{22} + \bar{\epsilon}_{33}) \quad (3)$$

Cu notațiile:

$$k = K_{23} = \frac{1}{2}(C_{22} + C_{23}) \quad ; \quad l = C_{12},$$

$$m = G_{23} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) = \frac{C_{66}}{2} \quad ; \quad n = C_{11},$$

relațiile (2), (3) astfel obținute împreună cu prima și a patra relație din formulele constitutive (1), pot fi grupate în sistemul:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}) &= k(\bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}) + l\bar{\varepsilon}_{11}, \\ \bar{\sigma}_{11} &= l(\bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}) + n\bar{\varepsilon}_{11}, \\ (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33}) &= 2m(\bar{\varepsilon}_{22} - \bar{\varepsilon}_{33}), \\ \bar{\tau}_{23} &= 2m\bar{\gamma}_{23}. \end{aligned} \quad (4)$$

Pentru matrice și pentru fibră se pot scrie relații analoge. În relațiile scrise, k este modulul de volum pentru dilatarea în planul transversal, fără alungire după direcția axei Ox_1 , m este modulul transversal de elasticitate în orice direcție perpendiculară pe axa fibrei, n este modulul de elasticitate longitudinal în cazul alungirii pe direcția fibrei cu deplasările împiedicate în planul perpendicular, iar l este modulul încrucișat de elasticitate, pentru deplasarea împiedicată după direcția fibrei. În cazul materialelor izotrope există relațiile:

$$l = k - m \quad ; \quad n = k + m. \quad (5)$$

Din punct de vedere al calculului analitic este convenabil a se lua aceste patru mărimi k, m, l, n ca un set de valori independente, care definesc proprietățile materialului compozit, considerat transversal izotrop. În continuare vom prezenta alte constante mecanice ingineresti care pot fi determinate prin calcul. Astfel, modulul lui Young și coeficientul lui Poisson la o încărcare longitudinală pot fi calculate cu relațiile:

$$E = n - \frac{l^2}{k} \quad ; \quad \nu = \frac{l}{2k}. \quad (6)$$

Procentul de fibră din volumul total al compozitului se va nota cu \hat{v}_f , iar procentul de matrice cu \hat{v}_m . Există următoarele relații elementare:

$$\bar{g} = \hat{v}_f \bar{g}_f + \hat{v}_m \bar{g}_m \quad ; \quad \hat{v}_1 + \hat{v}_2 = 1, \quad (7)$$

pentru orice funcție $g(y, z)$.

În cele ce urmează se vor stabili câteva relații generale care leagă constantele elastice ale compozitului de constantele elastice ale celor două faze.

2. Relații între constantele elastice

Prin calcule relativ simple aplicate formulelor scrise se pot obține următoarele relații între constantele elastice:

$$\frac{k - k_f}{l - l_f} = \frac{k - k_m}{l - l_m} = \frac{l - \hat{v}_f l_f - \hat{v}_m l_m}{n - \hat{v}_f n_f - \hat{v}_m n_m} = \frac{k_f - k_m}{l_f - l_m}. \quad (8)$$

O formă echivalentă dar mai simetrică și sugestivă este:

$$\begin{aligned} l - \hat{v}_f l_f - \hat{v}_m l_m &= \left(\frac{l_f - l_m}{k_f - k_m} \right) (k - \hat{v}_f k_f - \hat{v}_m k_m) = \\ &= \left(\frac{k_1 - k_2}{l_1 - l_2} \right) (n - \hat{v}_f n_f - \hat{v}_m n_m), \end{aligned} \quad (9)$$

în termeni de deviații de la ceea ce se numește legea amestecurilor. Aceste relații pot fi puse și sub forma echivalentă:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k_f}}{\nu - \nu_f} &= \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k_m}}{\nu - \nu_m} = \frac{4(\nu - \hat{v}_f \nu_f - \hat{v}_m \nu_m)}{-(E - \hat{v}_f E_f - \hat{v}_m E_m)} = \\ &= \frac{\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_m}}{\nu_f - \nu_m} \end{aligned} \quad (10)$$

sau, în formă echivalentă, în termeni de deviatori de la legea amestecurilor:

$$\begin{aligned} (\nu - \hat{v}_f \nu_f - \hat{v}_m \nu_m) &= \left(\frac{\nu_f - \nu_m}{\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_m}} \right) \left(\frac{1}{k} - \frac{\hat{v}_f}{k_f} - \frac{\hat{v}_m}{k_m} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_m}}{\nu_f - \nu_m} \right) (E - \hat{v}_f E_f - \hat{v}_m E_m) \end{aligned} \quad (11)$$

Prin obținerea acestor relații s-au eliminat parametrii l și n într-un mod simplu.

Dacă se aplică principiul energiei potențiale minime, se obțin cu ușurință marginile clasice ale modului de volum, datorate lui Voigt și Reuss:

$$k \leq \hat{v}_f k_f + \hat{v}_m k_m = k_V \quad ; \quad \frac{1}{k} \leq \frac{\hat{v}_f}{k_f} + \frac{\hat{v}_m}{k_m} = \frac{1}{k_R}.$$

Diferențele:

$$k_V - k_R = \frac{\hat{v}_f \hat{v}_m (k_f - k_m)^2}{\hat{v}_f k_m + \hat{v}_m k_f} \quad ;$$

$$\frac{1}{k_R} - \frac{1}{k_V} = \frac{\hat{v}_f \hat{v}_m \left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_m} \right)^2}{\frac{\hat{v}_f}{k_m} + \frac{\hat{v}_m}{k_f}} \quad (12)$$

devin mici cantități de ordinul al doilea când cele două faze au valori apropiate. Rezultă că aproximarea cu legea amestecurilor în cazul unor materiale care au proprietăți apropiate dau rezultate deosebit de bune. Nu același lucru se întâmplă dacă cele două materiale au proprietăți care diferă ca ordin de mărime.

Se poate arăta că

$$E \geq \hat{v}_f E_f + \hat{v}_m E_m, \quad (13)$$

cu egalitate dacă: $\hat{v}_f = \hat{v}_m$. De asemenea,

$$v \geq \hat{v}_f v_f + \hat{v}_m v_m,$$

dacă $(v_f - v_m)(k_f - k_m) \geq 0$ și

$$v \leq \hat{v}_f v_f + \hat{v}_m v_m,$$

dacă $(v_f - v_m)(k_f - k_m) \leq 0$

Faptul că modulul lui Young pentru un compozit cu fibre nu este mai mic de cel determinat cu legea amestecurilor poate fi arătat și pe o altă cale. Astfel trebuie să observăm că pentru o întindere uniaxială după direcția Ox_l dată, fie aceasta ε , energia unei unități reprezentative de volum RVE care este

$$W^* = \frac{1}{2} E \varepsilon^2, \quad (14)$$

depășește energia fibrei și a matricei având aceeași alungire specifică dar libere de orice legătură între ele și care este

$$W^t = \frac{1}{2} (\hat{v}_f E_f + \hat{v}_m E_m) \varepsilon^2. \quad (15)$$

Diferența este energia câmpului intern plan de deformații care va fi produs de dislocațiile de interfață necesare de a compensa diferența între coeficienții lui Poisson diferiți ai fibrei și ai matricei. În limbajul spațiului funcțiilor, starea de dislocații este ortogonală la cea din materialul considerat omogen. Relația exactă care arată acest lucru este

$$E - \hat{v}_f E_f - \hat{v}_m E_m = 2(v_f - v_m)^2 U \geq 0, \quad (16)$$

unde U este energia specifică totală a câmpului plan de dislocații datorat unei schimbări unitare în câmpul de deformații ale oricărei faze în cazul unei încărcări axiale și fără a fi împiedicate deformațiile laterale. În mod analog pot fi demonstrate și relațiile:

$$\frac{1}{k} - \frac{\hat{v}_f}{k_f} - \frac{\hat{v}_m}{k_m} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_m} \right)^2 U \leq 0, \quad (17)$$

$$n - \hat{v}_f n_f - \hat{v}_m n_m = -2(l_f - l_m)^2 V \leq 0, \quad (18)$$

$$k - \hat{v}_f k_f - \hat{v}_m k_m = -2(k_1 - k_2)^2 V \leq 0. \quad (19)$$

3. Calculul constantelor elastice pentru un cilindru compozit

În cele ce urmează vor fi prezentate rezultatele calculului pentru un cilindru compozit alcătuit dintr-o fibră cilindrică circulară înconjurată de o matrice cilindrică de formă de asemenea cilindrică circulară. Cu un efort de calcul substanțial, se pot obține valorile pentru modulul de volum k , modulul l , modulul longitudinal de elasticitate E și coeficientul lui Poisson sub forma:

$$k = \frac{\hat{v}_f k_f (k_m + m_m) + \hat{v}_m k_m (k_f + m_m)}{\hat{v}_f (k_m + m_m) + \hat{v}_m (k_f + m_m)}, \quad (20)$$

$$l = \frac{\hat{v}_f l_f (k_m + m_m) + \hat{v}_m l_m (k_f + m_m)}{\hat{v}_f (k_m + m_m) + \hat{v}_m (k_f + m_m)} \quad (21)$$

sau într-o formă care pune în evidență procentul de fibră și matrice

$$\frac{1}{k + m_m} = \frac{\hat{v}_f}{k_f + m_m} + \frac{\hat{v}_m}{k_m + m_m}, \quad (22)$$

$$\frac{1}{l + m_m} = \frac{\hat{v}_f}{l_f + m_m} + \frac{\hat{v}_m}{l_m + m_m} \quad (23)$$

și

$$v = v_m + \frac{(v_f - v_m)\hat{v}_f \left(\frac{1}{k_m} + \frac{1}{m_m} \right)}{\left(\frac{\hat{v}_f}{k_m} + \frac{\hat{v}_m}{k_f} + \frac{1}{m_m} \right)}, \quad (24)$$

$$n = \hat{v}_f n_f + \hat{v}_m n_m - \frac{\hat{v}_f \hat{v}_m (l_f - l_m)^2}{(\hat{v}_f k_m + \hat{v}_m k_f + m_m)}, \quad (25)$$

$$E = \hat{v}_f E_f + \hat{v}_m E_m + \frac{4\hat{v}_f \hat{v}_m (v_f - v_m)^2}{\left(\frac{\hat{v}_f}{k_m} + \frac{\hat{v}_m}{k_f} + \frac{1}{m_m} \right)}. \quad (26)$$

Am reprezentat grafic modulul de volum, coeficientul lui Poisson și modulul longitudinal de elasticitate determinate cu formulele obținute.

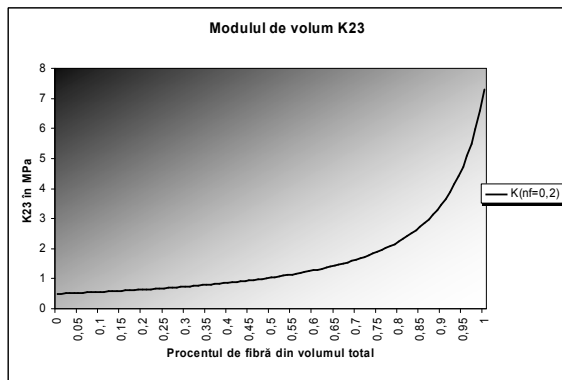


Fig.1. Variația modului de volum K în funcție de concentrația fibrei

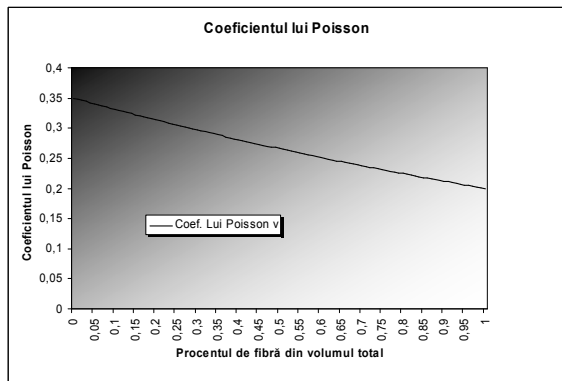


Fig.2. Variația coeficientului lui Poisson v în funcție de concentrația fibrei

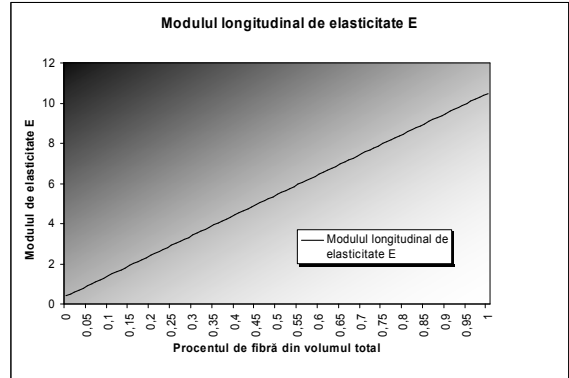


Fig. 3. Variația modului lui Young E în funcție de concentrația fibrei

Dacă se analizează fig.1-3 se constată că formulele propuse pentru coeficientul lui Poisson și pentru modulul de elasticitate longitudinală verifică foarte bine legea amestecurilor.

4. Marginile constantelor elastice

Pe baza relațiilor scrise anterior se pot stabili următoarele margini pentru constantele elastice, în cazul unui compozit ranforsat cu fibre cilindrice, relații care depind numai de concentrația fibrei

$$\begin{aligned} \frac{\hat{v}_f k_f (k_m + m_m) + \hat{v}_m k_m (k_f + m_m)}{\hat{v}_f (k_m + m_m) + \hat{v}_m (k_f + m_m)} &\leq k \leq \\ &\leq \frac{\hat{v}_f k_f (k_m + m_f) + \hat{v}_m k_m (k_f + m_f)}{\hat{v}_f (k_m + m_f) + \hat{v}_m (k_f + m_f)}, \end{aligned} \quad (27)$$

cu variantele:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{v}_f \hat{v}_m}{(\hat{v}_f k_m + \hat{v}_m k_f + m_f)} &\leq -\frac{(k - \hat{v}_f k_f - \hat{v}_m k_m)}{(k_f - k_m)^2} \leq \\ &\leq \frac{\hat{v}_f \hat{v}_m}{(\hat{v}_f k_m + \hat{v}_m k_f + m_m)}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{v}_f \hat{v}_m}{\left(\frac{\hat{v}_f}{k_m} + \frac{\hat{v}_m}{k_f} + \frac{1}{m_m} \right)} &\leq -\frac{\left(\frac{1}{k} - \frac{\hat{v}_f}{k_f} - \frac{\hat{v}_m}{k_m} \right)}{\left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_m} \right)} \leq \\ &\leq \frac{\hat{v}_f \hat{v}_m}{\left(\frac{\hat{v}_f}{k_m} + \frac{\hat{v}_m}{k_f} + \frac{1}{m_f} \right)}. \end{aligned} \quad (29)$$

De asemenea se pot stabili limite pentru modulul de elasticitate longitudinal și pentru coeficientul lui Poisson:

$$\frac{\hat{\nu}_f \hat{\nu}_m}{\left(\frac{\hat{\nu}_f}{k_m} + \frac{\hat{\nu}_m}{k_f} + \frac{1}{m_m} \right)} \leq \frac{(E - \hat{\nu}_f E_f - \hat{\nu}_m E_m)}{4(\nu_1 - \nu_2)^2} \leq \frac{\hat{\nu}_f \hat{\nu}_m}{\left(\frac{\hat{\nu}_f}{k_m} + \frac{\hat{\nu}_m}{k_f} + \frac{1}{m_f} \right)}, \quad (30)$$

de unde

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_f E_f + \hat{\nu}_m E_m + \frac{4\hat{\nu}_f \hat{\nu}_m (\nu_f - \nu_m)^2}{\left(\frac{\hat{\nu}_f}{k_m} + \frac{\hat{\nu}_m}{k_f} + \frac{1}{m_m} \right)} &\leq E \leq \\ \leq \hat{\nu}_f E_f + \hat{\nu}_m E_m + \frac{4\hat{\nu}_f \hat{\nu}_m (\nu_f - \nu_m)^2}{\left(\frac{\hat{\nu}_f}{k_m} + \frac{\hat{\nu}_m}{k_f} + \frac{1}{m_f} \right)} \end{aligned} \quad (31)$$

și

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_f \nu_f + \hat{\nu}_m \nu_m + \frac{(\nu_f - \nu_m) \hat{\nu}_f \hat{\nu}_m \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_f} \right)}{\left(\frac{\hat{\nu}_f}{k_m} + \frac{\hat{\nu}_m}{k_f} + \frac{1}{m_2} \right)} &\leq \nu \leq \\ \leq \hat{\nu}_f \nu_f + \hat{\nu}_m \nu_m + \frac{(\nu_f - \nu_m) \hat{\nu}_f \hat{\nu}_m \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_f} \right)}{\left(\frac{\hat{\nu}_f}{k_m} + \frac{\hat{\nu}_m}{k_f} + \frac{1}{m_1} \right)}, \end{aligned} \quad (33)$$

unde s-a considerat că $m_f \geq m_m$.

În cele ce urmează se prezintă graficele pentru modulul de volum, modulul de elasticitate longitudinal și coeficientul lui Poisson pentru trei cazuri reprezentative.

În primul caz (studiul de caz nr.1) se va considera un compozit alcătuit dintr-o matrice cu modulul longitudinal de elasticitate egal cu 0,4 MPa și coeficientul lui Poisson egal cu 0,35 iar fibra are modulul longitudinal de elasticitate egal cu 10,5 MPa și coeficientul lui Poisson egal cu 0,22. În acest caz se reprezintă grafic marginile modulului de volum considerând mai întâi pe ordonată raportul dintre raza fibrei și raza cilindrului compozit și a doua oară volumul procentual de fibră raportat la volumul total al materialului.

În al doilea caz (studiul de caz nr.2) am considerat compozitul alcătuit din rășină epoxi cu modulul de elasticitate longitudinal egal cu 2,7 MPa și coeficientul lui Poisson egal cu 0,35 iar fibra are modulul de elasticitate longitudinal egal cu 72,4 și coeficientul lui Poisson egal cu 0,22.

În al treilea caz (studiul de caz nr.3) s-au luat aceleași valori pentru fibră ca la exemplul precedent iar matricea s-a considerat având un modul de elasticitate longitudinal de zece ori mai mic și același coeficient al lui Poisson.

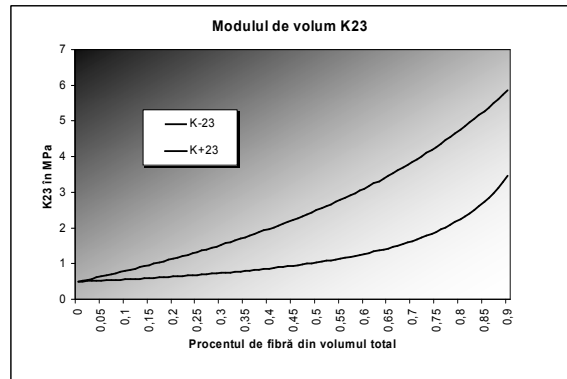


Fig. 4. Marginile modulului de volum K_{23} pentru studiul de caz nr.1

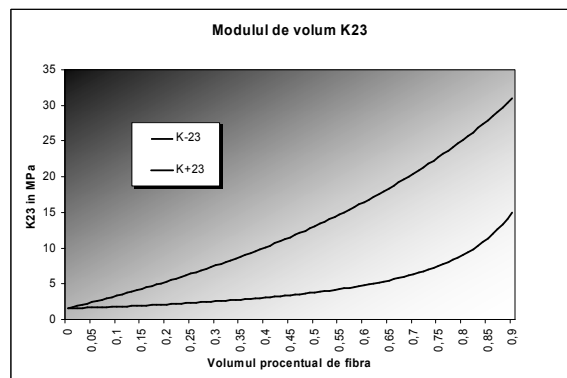


Fig.5. Marginile modulului de volum K_{23} pentru studiul de caz nr.2

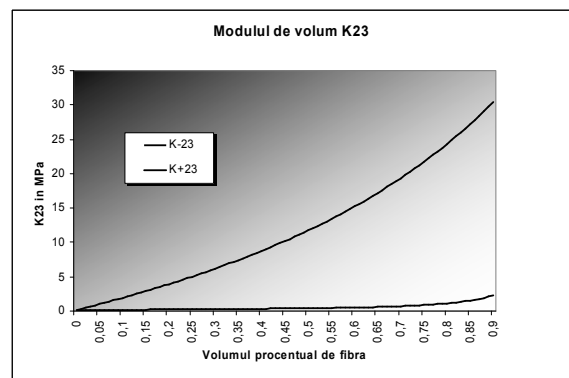


Fig. 6. Marginile modulului de volum K_{23} pentru studiul de caz nr.3

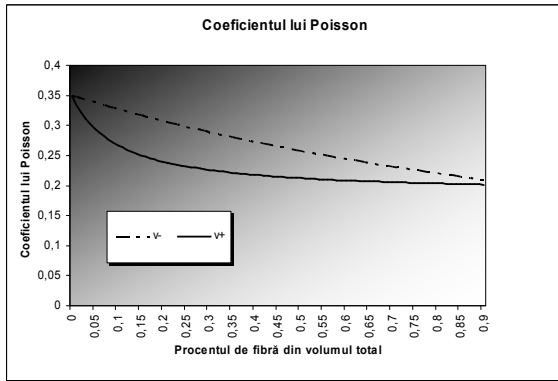


Fig. 7. Marginile coeficientului lui Poisson în studiul de caz nr.1

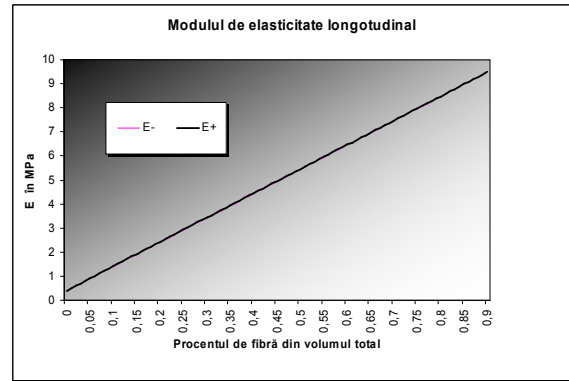


Fig. 10. Marginile modului de elasticitate longitudinal E în studiul de caz nr.1

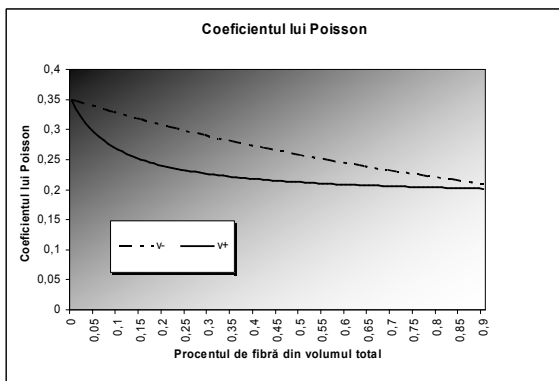


Fig. 8. Marginile coeficientului lui Poisson în studiul de caz nr.2

Se face constatarea că, deși în cele trei studii de caz diferențele între proprietățile matricei și fibrei sunt foarte diferite, alura coeficientului lui Poisson rămâne practic aceeași.

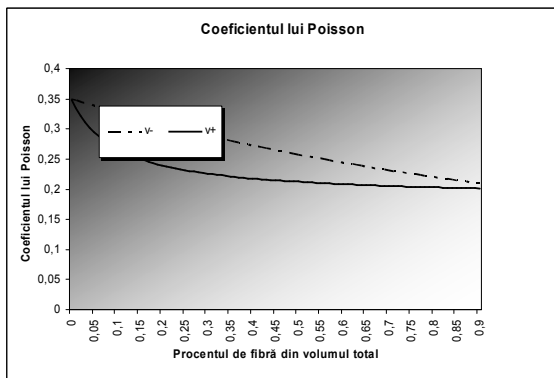


Fig. 9. Marginile coeficientului lui Poisson în studiul de caz nr.3

6. Concluzii

Se constată că formulele de evaluare a modului de elasticitate longitudinal sunt foarte bune și ascultă, practic, de legea amestecurilor. Formulele de determinare a marginilor coeficientului lui Poisson sunt mai slabe dar ascultă, aproximativ, și ele de legea amestecurilor. Formulele de determinare a modului de volum ascultă de legea amestecurilor scrisă sub formă de medie armonică (formulă utilizată în general pentru descrierea proprietățile în planul transversal, perpendicular pe fibră).

Bibliografie

1. Goia, I., Modrea, A. ș.a. *Calculus of the Mechanical Properties for the Composite Materials*. A IX-a Conferința internațională CONAT, Brașov, 1999.
2. Hashin, Z., Rosen, W.B. *The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials*. Journal of Applied Mechanics, June, 1964, p.223-232.
3. Hill, R. *Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials: I. Elastic Behaviour*. J. Mech. Phys. Solids, 1964, vol.12, p. 199-212.
4. Hill, R. *Continuum Micro-Mechanics of Elastoplastic Polycrystals*. J. Mech. Phys. Solids, 1965, Vol.13, p.89-101.
5. Hill, R., *Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials-III. Self-Consistent Model*. J. Mech. Phys. Solids, 1965, vol.13, p.189-198.